DS n°5 : Continuité, dérivabilité, convexité, relations, arithmétique – Corrigé

Noté sur 110 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/93.

/15 **Exercice 1 : Un calcul de PGCD**

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $A = 2^{8n} - 3^{2n} + 13$ et $B = 2^{4n} - 3^n$.

/1,5 **1)** Calculer $B \times (2^{4n} + 3^n)$.

$$\begin{aligned} B \times (2^{4n} + 3^n) &= (2^{4n} - 3^n) \times (2^{4n} + 3^n) \\ &= (2^{4n})^2 - (3^n)^2 \\ &= \boxed{2^{8n} - 3^{2n}} \end{aligned}$$

/3,75 **2)** Montrer que $A \wedge B$ divise $B \wedge 13$.

On pose $d = A \wedge B$. Pour montrer que d divise $B \wedge 13$, il suffit de montrer que $d \mid B$ et $d \mid 13$. Comme $d = A \wedge B$, il est clair que $d \mid B$. Ensuite, comme $d \mid A$ et $d \mid B$, on a :

$$d \mid A - B \times (2^{4n} + 3^n)$$

donc par la question 1, cela donne $d \mid 13$. Ainsi, $\boxed{d \mid B \wedge 13}$. Note : il était

aussi possible de montrer directement que $A \wedge B = B \wedge 13$. En effet, par la question 1, on peut écrire que $A = B \times q + r$ avec $q = 2^{4n} + 3^n$ et $r = 13$. On a alors $A \wedge B = B \wedge 13$. Il n'est pas nécessaire de vérifier que $0 \leq r < |B|$, i.e. qu'on a bien une division euclidienne.

/2,75 **3)** Justifier brièvement que pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, l'entier $a - b$ divise $a^n - b^n$.

On a

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

et comme $\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $a - b$ divise $a^n - b^n$.

/7,5 **4)** En déduire que 13 divise B. Que vaut $A \wedge B$?

On a $B = 2^{4n} - 3^n = (2^4)^n - 3^n = 16^n - 3^n$ donc par la question précédente, B est divisible par $16 - 3$, c'est-à-dire 13.

En particulier, $B \wedge 13 = 13$. On en déduit par la question 2 que $A \wedge B$ divise 13, et comme $A \wedge B$ est positif, on a $A \wedge B \in \{1, 13\}$. Par ailleurs, on a vu que $A = B \times (2^{4n} + 3^n) + 13$. Comme $13 \mid B$ et $13 \mid 13$, on a $13 \mid B \times (2^{4n} + 3^n) + 13$, donc $13 \mid A$. Comme par ailleurs $13 \mid B$, on en déduit que $13 \mid A \wedge B$, donc $\boxed{A \wedge B = 13}$.

/41,5 **Exercice 2 : Une étude de fonction**

Soit h la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $h(x) = \exp\left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)$.

/2,5 **1)** Montrer qu'on peut prolonger h par continuité en -1 et en 1. Préciser les valeurs de $h(1)$ et $h(-1)$.

On a $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 2$ donc par quotient

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

Enfin, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = 0$. Ainsi, h est prolongeable par continuité en 1 en posant $\boxed{h(1) = 0}$. On montre de même (ou en utilisant que h est paire) que h est prolongeable par continuité en -1 en posant $\boxed{h(-1) = 0}$.

/1 **2)** Justifier que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par composition et quotient de telles fonctions.

/2,5 **3)** Déterminer, pour tous $\alpha, \beta > 0$, la limite de $\dfrac{1}{(x^2 - 1)^\alpha} e^{\frac{\beta}{x^2 - 1}}$ lorsque x tend vers $(-1)^+$ ou vers 1^-.

Note : techniquement, il faudrait $\alpha \in \mathbb{N}^*$ pour que $(x^2 - 1)^\alpha$ ait un sens. Il y a donc une erreur dans l'énoncé.

On pose $X = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, de sorte que $X \xrightarrow[x \to 1^-]{} -\infty$. De plus, par croissances comparées,

$$X^\alpha e^{\beta X} \xrightarrow[X\to-\infty]{} 0$$

donc par composition, $\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{(x^2-1)^\alpha}e^{\frac{\beta}{x^2-1}}\right) = \boxed{0}$. On montre que la limite est identique en $(-1)^+$.

/7,5 **4)** Calculer h' sur $]-1,1[$ et en déduire que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$.

Soit $x \in]-1,1[$.

$$h'(x) = \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}h(x) = \boxed{\frac{-4x}{(x^2-1)^2}h(x)}$$

Montrons que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$. Tout d'abord, on a vu en question **2)** que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$. Par ailleurs, on a

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$$

si bien que

$$h'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}e \times e^{\frac{2}{x^2-1}}$$

On remarque alors, grâce à la question précédente, que $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{(x^2-1)^2}e^{\frac{2}{x^2-1}} = 0$. Ainsi, par produit,

$$\lim_{x\to1^-} h'(x) = -4e\times 0 = 0$$

Comme h est continue sur $[-1,1]$, on en déduit grâce au théorème de la limite de la dérivée que h est dérivable en 1 et que $h'(1) = 0$. De plus, comme $\lim_{x\to1^-} h'(x) = h'(1)$, on en déduit que h' est continue en 1.

De même, on montre que h est dérivable en -1, que $h'(-1) = 0$ et que h' est continue en -1. Cela permet de conclure que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$.

5) Dresser le tableau de variation de h sur $[-1,1]$. En déduire que h admet un
/6,5 unique point fixe sur $[-1,1]$ que l'on notera ℓ.

x	-1 $\quad$ 0	0 $\quad$ 1
h'	$+$	$-$
h	$0 \nearrow e^{-1}$	$e^{-1} \searrow 0$

Comme $h \geq 0$, la fonction h n'admet pas de point fixe sur $[-1,0[$. Il suffit donc de montrer que h possède exactement un point fixe dans $[0,1]$.

Montrons l'existence d'un point fixe. Posons $g : x \mapsto h(x) - x$. On remarque que $g(0) = e^{-1} > 0$ et $g(1) = -1 < 0$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $\ell \in [0,1]$ tel que $g(\ell) = 0$, donc tel que $h(\ell) = \ell$.

Montrons l'unicité de ce point fixe. Comme g est strictement décroissante sur $[0,1]$ car h et $x \mapsto -x$ le sont, elle est injective par le corollaire du TVI et donc 0 admet au plus un unique antécédent par g. Ceci montre que ℓ est unique.

/7 **6)** Calculer h'' sur $]-1,1[$, puis étudier le signe de h''.

Soit $x \in]-1,1[$.

$$\begin{aligned}
h''(x) &= \frac{-4}{(x^2-1)^2}h(x) + \frac{4x\times 2(x^2-1)(2x)}{(x^2-1)^4}h(x) + \frac{16x^2}{(x^2-1)^4}h(x)\\
&= \frac{-4(x^2-1)^2+16x^2(x^2-1)+16x^2}{(x^2-1)^4}h(x)\\
&= \frac{-4x^4+8x^2-4+16x^4-16x^2+16x^2}{(x^2-1)^4}h(x)\\
&= \frac{12x^4+8x^2-4}{(x^2-1)^4}h(x)\\
&= 4\frac{3x^4+2x^2-1}{(x^2-1)^4}h(x)
\end{aligned}$$

Comme $h > 0$, on remarque que $h''(x)$ est du même signe que $3x^4+2x^2-1$. Posons $X = x^2$ et factorisons $3X^2+2X-1$: le discriminant est

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$\Delta > 0$ donc ce polynôme admet deux racines réelles :

$$X_- = \frac{-2-4}{6} = -1 \qquad X_+ = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$$

Ainsi, $3X^2+2X-1 = 3(X+1)\left(X+\frac{1}{3}\right) = (X+1)(3X+1)$. On en déduit que

$$3x^4+2x^2-1 = (x^2+1)(3x^2-1)$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, $h''(x) > 0$ si et seulement si $3x^2 - 1 > 0$, donc si et seulement si $x \in \left]-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right[$.

7) Déterminer la plus petite valeur $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [-1,1] \quad |h'(x)| \leq k$. On
/5 admettra que $k < 1$ sans chercher à en faire la preuve.

Grâce au signe de h'', on peut construire le tableau de variations de h' :

x	$-1 \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad 1$
h''	$+$	$-$	$+$
h'	$0 \nearrow$	$\searrow$	$\nearrow 0$

On remarque ainsi que h' atteint son maximum en $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et son minimum en $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Or :

$$\begin{aligned}
h'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{-\frac{4}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2} \exp\left(\frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}-1}\right) \\
&= \frac{-\frac{4}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{9}} \exp\left(-\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}\right) \\
&= -\frac{9}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{4}{2}\right) \\
&= -\frac{3\sqrt{3}}{e^2}
\end{aligned}$$

et par imparité de h', on a de même $h'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{e^2}$. Ainsi, pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$|h'(x)| \leq k \qquad \text{avec} \qquad k = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{e^2}}$$

8) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = h(u_n)$. On rappelle que ℓ est l'unique point fixe de h, déterminé en question **5)**.

/6 **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$

La fonction h est (continue et) dérivable sur $[-1,1]$. Par la question précédente, on a de plus $\forall x \in [-1,1] \quad |h'(x)| \leq k$. Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis, on obtient que h est k-lipschitzienne. En particulier,

$$|h(u_n) - h(\ell)| \leq k\,|u_n - \ell|$$

et donc $\boxed{|u_{n+1} - \ell| \leq k\,|u_n - \ell|}$.

/3,5 **b)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Par récurrence immédiate, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$

et comme $|k| < 1$, on en déduit que $k^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, $|u_n - \ell| \to 0$, ou encore $u_n \to \ell$.

/21 **Exercice 3 : Une variante du TAF**

Soit a et b deux réels fixés tels que $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, trois fois dérivable sur $]a,b[$. On souhaite prouver que :

$$\exists c \in]a,b[\quad f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f^{(3)}(c)$$

Pour cela, on considère la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right] \qquad \varphi(x) = f\left(\frac{a+b}{2} + x\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) - 2xf'\left(\frac{a+b}{2}\right) - Kx^3$$

où K est choisi de façon à ce que $\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$.

/1,5 **1)** Justifier que φ est bien définie sur $\left[0, \frac{b-a}{2}\right]$.

Soit $x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$. Comme $0 \leq x \leq \frac{b-a}{2}$, on a

$$\frac{a+b}{2} \quad \leq \quad \frac{a+b}{2} + x \quad \leq \quad \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b$$

ainsi, $\frac{a+b}{2} + x \in [a,b]$, donc $f\left(\frac{a+b}{2} + x\right)$ a un sens. De même, $\frac{a+b}{2} - x \in$

$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \subset [a,b]$ donc $f\left(\frac{a+b}{2} - x\right)$ a un sens. Enfin, $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ a un sens car $\frac{a+b}{2} \in [a,b]$ (c'est le milieu de a et b).

Finalement, $\varphi(x)$ a un sens pour tout $x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$.

/1,5 **2)** Déterminer la constante K.

On a

$$\begin{aligned} & \varphi\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0 \\ \iff & f(b) - f(a) - (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - K\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = 0 \\ \iff & K = \boxed{\frac{8}{(b-a)^3}\left(f(b) - f(a) - (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)} \end{aligned}$$

/3 **3)** Prouver qu'il existe $c_1 \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$.

On remarque que $\varphi(0) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - 0 - 0 = 0$ et $\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$ par hypothèse.

De plus φ est continue et dérivable par somme et composée de telles fonctions (car f est $\mathscr{C}^2$). Par le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $c_1 \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$.

/4 **4)** Prouver qu'il existe $c_2 \in]0, c_1[$ tel que $\varphi''(c_2) = 0$.

On a vu que φ est dérivable et pour tout $x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$,

$$\varphi'(x) = f'\left(\frac{a+b}{2} + x\right) + f'\left(\frac{a+b}{2} - x\right) - 2f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - 3Kx^2$$

et donc $\varphi'(0) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. Par ailleurs, $\varphi'(c_1) = 0$.

Enfin, comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ par somme et composée de telles fonctions. En particulier, φ est continue sur $[0, c_1]$, dérivable sur $]0, c_1[$. Par le théorème de Rolle, il existe donc $c_2 \in]0, c_1[$ tel que $\varphi''(c_2) = 0$.

5) Prouver qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f''\left(\frac{a+b}{2} + c_2\right) - f''\left(\frac{a+b}{2} - c_2\right) = 2c_2 f^{(3)}(c)$$

/6

Tout d'abord, comme $c_2 < c_1 < \frac{b-a}{2}$, on a $\frac{a+b}{2} + c_2 \in [a,b]$ et $\frac{a+b}{2} - c_2 \in [a,b]$. Comme f est $\mathscr{C}^2$, la fonction f'' est continue sur $\left[\frac{a+b}{2} - c_2, \frac{a+b}{2} + c_2\right]$. De plus, f'' est dérivable sur $\left]\frac{a+b}{2} - c_2, \frac{a+b}{2} + c_2\right[$ puisque cet intervalle est inclus dans $]a,b[$ (car $c_2 < \frac{b-a}{2}$) et f est trois fois dérivable sur $]a,b[$. On en déduit par le théorème des accroissements finis qu'il existe $c \in \left]\frac{a+b}{2} - c_2, \frac{a+b}{2} + c_2\right[$ tel que

$$\frac{f''\left(\frac{a+b}{2} + c_2\right) - f''\left(\frac{a+b}{2} - c_2\right)}{\frac{a+b}{2} + c_2 - \left(\frac{a+b}{2} - c_2\right)} = f^{(3)}(c)$$

ou encore

$$\frac{f''\left(\frac{a+b}{2} + c_2\right) - f''\left(\frac{a+b}{2} - c_2\right)}{2c_2} = f^{(3)}(c)$$

ou encore

$$f''\left(\frac{a+b}{2} + c_2\right) - f''\left(\frac{a+b}{2} - c_2\right) = 2c_2 f^{(3)}(c)$$

/5 **6)** En déduire le résultat.

Pour tout $x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$,

$$\varphi''(x) = f''\left(\frac{a+b}{2} + x\right) - f''\left(\frac{a+b}{2} - x\right) - 6Kx$$

Par la question 4, on a $\varphi''(c_2) = 0$ donc :

$$f''\left(\frac{a+b}{2}+c_2\right) - f''\left(\frac{a+b}{2}-c_2\right) - 6Kc_2 = 0$$

ou encore

$$2c_2 f^{(3)}(c) - 6Kc_2 = 0$$

ce qui se réécrit : $K = \frac{1}{3}f^{(3)}(c)$. Ainsi, comme $\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$, on a :

$$0 = f(b) - f(a) - (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f'''(c)}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

ce qui se réécrit

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f^{(3)}(c)$$

Exercice 4 : Régularité d'une fonction convexe

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $a \in \mathring{I}$, i.e. a est un point de I qui n'est pas égal à une borne de I. On note τ_a le taux d'accroissement de f en a, qui est une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. On admet que, comme f est convexe, l'application τ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

/6,5 **1)** Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en a.

Soit $x, z \in I$ tels que $x < a < z$ (de tels points existent car $a \in \mathring{I}$). Par l'inégalité des pentes, on a

$$\tau_a(x) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \tau_a(z)$$

En particulier, τ_a est majorée sur $]x, a[$ par $\tau_a(z)$. Comme τ_a est croissante, par le théorème de la limite monotone (pour les fonctions), on en déduit que τ_a admet une limite **finie** à gauche en a, donc f est dérivable à gauche en a. On montre de même que f est dérivable à droite en a.

/2 **2)** Peut-on affirmer que f est dérivable sur $\mathring{I}$?

Non. Contre-exemple : la fonction $f : x \mapsto |x|$ est convexe (par la définition et l'inégalité triangulaire) mais n'est pas dérivable.

/3 **3)** Montrer que f est continue en a.

Comme f est dérivable à gauche en a, elle est continue à gauche en a. De même, f est continue à droite en a. Ainsi, f est continue à gauche et à droite en a donc est continue en a.

/4 **4)** Peut-on affirmer que f est continue sur I ?

Non. Contre-exemple : on considère la fonction

$$f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Il est clair que f n'est pas continue en 1. On va montrer que f est convexe. Soit $x, y \in [0,1]$ avec $x < y$ et $\alpha \in]0,1[$. Alors le point $u = \alpha x + (1-\alpha)y$ vérifie $u \in]x, y[$. En particulier, $u < 1$ car $y \leq 1$. Ainsi,

$$f(u) = f(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0$$

tandis que $\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geq 0$ car f est positive. D'où f est convexe.

/17 **Exercice 5 : Relations binaires**

Soit E un ensemble. On dénote $\mathcal{M}$ une partie non vide de $\mathscr{P}(E)$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M} \qquad \exists Z \in \mathcal{M} \qquad Z \subset X \cap Y \qquad (\star)$$

On remarque que $\mathcal{M} = \{E\}$ et $\mathcal{M} = \{\varnothing\}$ vérifient $(\star)$, mais $\mathcal{M}$ peut a priori être différent de $\{E\}$ et $\{\varnothing\}$.

1) On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathscr{P}(E)$ par :

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \qquad A\mathcal{R}B \iff \exists X \in \mathcal{M} \quad A \cap X = B \cap X$$

/4,5 Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Soit $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$.

- Montrons que $\mathcal{R}$ est réflexive. Comme $\mathcal{M}$ est non vide, il existe $X \in \mathcal{M}$. Pour cet ensemble X, on a $A \cap X = A \cap X$, donc $A\mathcal{R}A$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est réflexive.
- Montrons que $\mathcal{R}$ est symétrique. Supposons $A\mathcal{R}B$. Alors il existe $X \in \mathcal{M}$ tel que $A \cap X = B \cap X$. Alors, naturellement, $B \cap X = A \cap X$, d'où $B\mathcal{R}A$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est symétrique.
- Montrons que $\mathcal{R}$ est transitive. Supposons $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$. Alors il existe $X \in \mathcal{M}$ tel que $A \cap X = B \cap X$ et $Y \in \mathcal{M}$ tel que $B \cap Y = C \cap Y$. Or, il existe $Z \in \mathcal{M}$ tel que $Z \subset X \cap Y$. Pour conclure que $A\mathcal{R}C$, on va montrer que $A \cap Z = C \cap Z$. Comme $Z \subset X \cap Y \subset X$, on a $Z \cap X = Z$, et par ailleurs

$$\begin{aligned} A \cap X = B \cap X &\implies A \cap (X \cap Z) = B \cap (X \cap Z) \\ &\implies A \cap Z = B \cap Z \end{aligned}$$

  et de même on montre que $B \cap Z = C \cap Z$. Ainsi, $A \cap Z = C \cap Z$ avec $Z \in \mathcal{M}$. Donc $A\mathcal{R}C$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Étant donné $A \in \mathscr{P}(E)$, on note $\hat{A}$ la classe d'équivalence de A selon $\mathcal{R}$.

a) Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ lorsque $\mathcal{M} = \{E\}$, puis lorsque
/3 $\mathcal{M} = \{\varnothing\}$.

Si $\mathcal{M} = \{E\}$, alors

$$A\mathcal{R}B \iff A \cap E = B \cap E \iff A = B$$

Ainsi, $\mathrm{cl}(A) = \{A\}$: les classes d'équivalences sont des singletons, il y a une classe par élément de $\mathscr{P}(E)$.
Si $\mathcal{M} = \{\varnothing\}$, alors

$$A\mathcal{R}B \iff A \cap \varnothing = B \cap \varnothing \iff \varnothing = \varnothing$$

Ainsi, toute partie B de E est un élément de $\mathrm{cl}(A)$. On en déduit qu'il n'y a qu'une classe d'équivalence : $\mathscr{P}(E)$ tout entière.

/3,5 **b)** Montrer que si $A \in \hat{E}$ et $B \in \hat{E}$, alors $A \cap B \in \hat{E}$.

On suppose $A \in \hat{E}$ et $B \in \hat{E}$. Donc on a $A\mathcal{R}E$ et $B\mathcal{R}E$, ce qui entraine qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}$ tels que

$$A \cap X = E \cap X \qquad \text{et} \qquad B \cap Y = E \cap Y$$

ou encore

$$A \cap X = X \qquad \text{et} \qquad B \cap Y = Y$$

On pose $Z = X \cap Y \in \mathcal{M}$. Alors

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap Z &= A \cap B \cap X \cap Y \\ &= (A \cap X) \cap (B \cap Y) \\ &= X \cap Y \\ &= Z \\ &= E \cap Z \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $(A \cap B)\mathcal{R}E$, donc $A \cap B \in \hat{E}$.

c) On définit la relation $\mathcal{S}$ par

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \qquad A\mathcal{S}B \iff \exists Y \in \hat{E} \quad A \cap Y = B \cap Y$$

/6 Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a $A\mathcal{R}B \iff A\mathcal{S}B$.

Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Supposons $A\mathcal{S}B$. Alors il existe $Y \in \hat{E}$ tel que $A \cap Y = B \cap Y$. Or,

$$\begin{aligned} Y \in \hat{E} &\iff \exists X \in \mathcal{M} \quad Y \cap X = E \cap X \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M} \quad Y \cap X = X \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M} \quad X \subset Y \end{aligned}$$

Soit donc $X \in \mathcal{M}$ tel que $X \subset Y$. Alors, comme $A \cap Y = B \cap Y$, on a :

$$\begin{aligned} &A \cap Y \cap X = B \cap Y \cap X \\ \implies &A \cap (Y \cap X) = B \cap (Y \cap X) \\ \implies &A \cap X = B \cap X \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré qu'il existe $X \in \mathcal{M}$ tel que $A \cap X = B \cap X$. On en déduit que $A\mathcal{R}B$.

Supposons à présent $A\mathcal{R}B$. Ainsi, il existe $X \in \mathcal{M}$ tel que $A \cap X = B \cap X$. Or, comme on a $X\mathcal{R}E$ (puisque $X \cap X = E \cap X$), en posant $Y = X \in \hat{E}$ on a bien $A \cap Y = B \cap Y$, et donc $A\mathcal{S}B$.